جامعة البعث

الاسم :

كلية العلوم

الرقم :

امتحان مقرر التحليل ١

العام الدراسي ٢٠١٤_٢٠١٥

السنة أولى– رياضيات –د. إضافية

السؤال الأول [٣٥]: ليكن لدينا السلاسل التالية :

$$S_1=\sum_{n=7}^{\infty}\left[\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n^2-8n+12}\right] \quad , S_2=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\left(\frac{21n^2+1}{7n^3+3n+1}\right)} \quad , \quad S_3=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n\left[\frac{1}{n^2(n+1)}\right]$$

و المطلوب : ١) ادرس تقارب السلسلتين الأولى و الثانية واحسب المجموع في حال التقارب !

٢) أوجد نوع ا لتقارب للسلسلة الثالثة.

السؤال الثاني [٤٥ د]: ليكن لدينا الدالتين التاليتين :

$$y_1=\arcsin\left[\sin\left(x^3+\ln(2x+1)\right)\right]+3^{\arcsin 3x}+e^3 \quad , \quad y_2=\begin{cases}\arcsin 5^{\frac{x-7}{7}} & ; x>7\\ 12 & ; x=7\\ \dfrac{Arcth\left[th\left(x^3-343\right)\right]}{x^2-49} & ; x<7\end{cases}$$

و المطلوب : ١) احسب مشتق y_1 !

٢) ادرس استمرار الدالة y_2 وحدد نوع نقطة الانقطاع إن وجدت!

٣) اكتب معادلة منحني النيفرونيد(**Nephroid**)**مع الرسم و احسب** y_n .

السؤال الثالث [٢٠ د]: ادرس تقارب الجداء اللانهائي التالي :

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}\left(2^{\frac{[illegible]}{n^2}}\right)$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

د. مصطفى حسن

يا كل ما أملك ... يا أندر نادري

سلم درجات امتحان مقرر التحليل ١ للعام الدراسي ٢٠١٤ــ٢٠١٥ س١ ــ رياضيات ــ ف3

الجواب الأول [٣٥د]: ١) السلسلة الأولى متقاربة لأن ـ ١٥د ـ :

$$S_1=\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{5^n}+\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{n^2-8n+12}=S_{1-1}+S_{1-2}\quad ;\frac{1}{n^2-8n+12}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-2}\right]\Rightarrow$$

$$S_N=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{N-6}-\frac{1}{N-2}+\ldots+\frac{1}{N}-\frac{1}{N+4}\right]$$

$$S_N=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N+4}\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{25}{36}\Rightarrow S_{1-1}=\frac{25}{36}$$

$$S_{1-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}-\left[1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}+\frac{1}{3125}+\frac{1}{15625}\right]=0.750016\Rightarrow$$

$$S_1=0.750016+0.694444=1.44446.$$

السلسلة الثانية متباعدة لأن ـ ١٠د ـ : $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\left(\frac{21n^3+3}{7n^3+3n-1}\right)}$ ، $2^{\left(\frac{21n^3+3}{7n^3+3n-1}\right)}\xrightarrow[n\to\infty]{}2^3=8\neq 0$

٢) نوع تقارب السلسلة ـ ١٠د ـ : $S_3=\sum_{n=1}^{\infty}n.(-1)^n\left[\frac{1}{n^2(n+1)}\right]$

السلسلة متناوبة وهي متقاربة لأنها تحقق شرطي ليبنتز

$$\frac{1}{n(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ \frac{1}{n(n+1)}>\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

وكذلك $S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}\right]$ متقاربة ومجموعها الواحد، فالتقارب مطلق.

الجواب الثاني [٤٥د]:

١) إيجاد المشتق ـ ١٠د ـ :

$$y_1' = \left\{\arcsin\left[\sin\left(x^3 + \ln(2x+1)\right)\right] + 3^{\arcsin 3x} + e^5\right\}' =$$

$$= 3x^2 + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} 3^{\arcsin 3x} \ln 3.$$

٢) استمرار الدالة y_2 -٢٠-: الدالة مستمرة لأنها تركيب دوال مستمرة ولكن في النقطة $x = 5$ نجد:

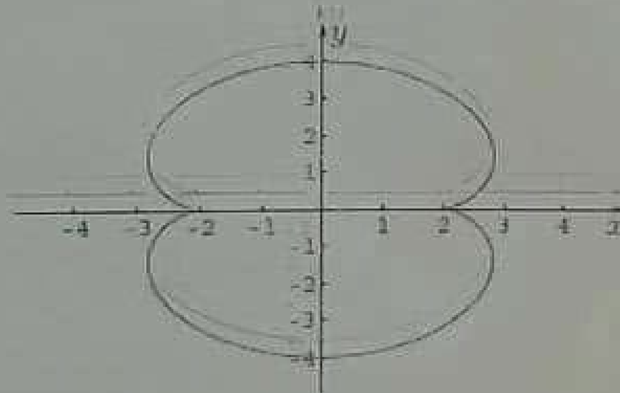
$$\lim_{x \to 7} y_2 = \frac{147}{14}, \quad \lim_{x \to 7} y_2 = \frac{\pi}{2} \neq y_2(0) = 12$$

فالدالة مستمرة من اليمين فقط فهي نقطة انقطاع وبما أن كلا النهايتين محدودتان فهي من النوع الأول.

٣) تعطى المعادلة القطبية لمنحني النيفروئيد بالشكل التالي -٥-:

$$x(t) = r(3\cos t - \cos 3t)$$
$$y(t) = r(3\sin t - \sin 3t)$$

ويأخذ منحنيه الشكل -٥+٥-:



$$\Rightarrow y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{3r(\cos t - \cos 3t)}{3r(\sin 3t - \sin 3t)} = \frac{\cos t - \cos 3t}{\sin 3t - \sin 3t}$$

الجواب الثالث [٢٠ د]:

الحل: حسب المبرهنة (٦-٣) ندرس بدلاً من الجداء المعطى السلسلة:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(2^{\frac{(n-1)^2}{n!}}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n!}\ln(2)=\ln(2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n!}$$

وهذه المتسلسلة هي متسلسلة عددية ذات حدود موجبة كما أن :

$$S=\ln(2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n!}=\ln(2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2n+1}{n!}$$
$$=\ln(2)\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n!}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\right]=\ln(2)[S_1-2S_2+S_3]$$

لندرس تقارب كل سلسلة على حدا:

$$S_1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n.(n-1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\Rightarrow S_1=2e-1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n(n-1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=e-1 \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-2$$

وبالتالي فإن الجداء متقارب وحاصله :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(2^{\frac{(n-1)^2}{n!}}\right)=e^{\ln(2)[e-1]}=\left[e^{\ln(2)}\right]^{(e-1)}=2^{(e-1)}$$